



第7章 非正弦周期电流电路

7.1 非正弦周期量及其分解

7.2 非正弦周期电流电路中的有效值、平均值和平均功率

7.3 非正弦周期电流电路的计算

目的与 要求

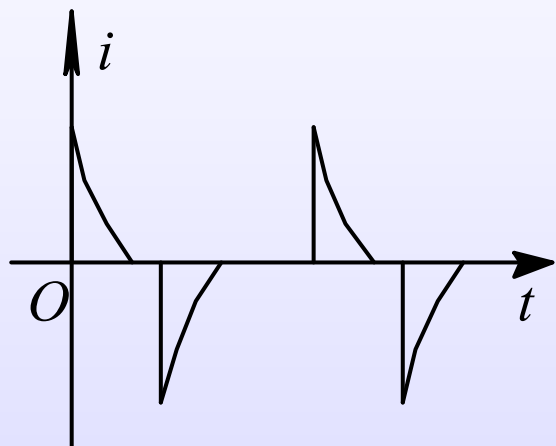
- 1.了解常见的非正弦周期曲线及其分解
2. 掌握非正弦周期量有效值
- 3.会对非正弦周期电路进行分析与计算

重点与难点

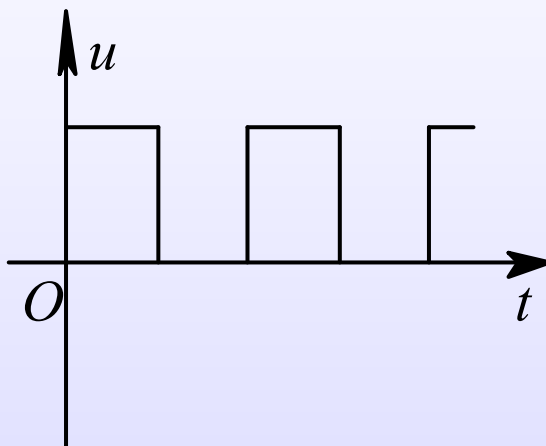
- 重点：
1. 非正弦周期量的有效值
 2. 非正弦周期电路的分析 计算
- 难点：
- 非正弦周期电路的分析 计算

7.1 非正弦周期量及其分解（一）

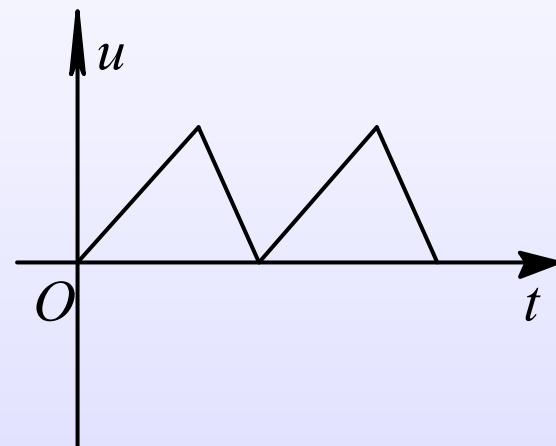
1、常见的非正弦周期曲线



(a)



(b)



(c)

图7.1几种常见的非正弦波

7.1 非正弦周期量及其分解（二）

2. 设周期函数 $f(t)$ 的周期为 T , 角频率 $\omega=2\pi/T$, 则其分解为傅里叶级数为

$$\begin{aligned} f(t) &= A_0 + A_{1m} \sin(\omega t + \theta_1) + A_{2m} \sin(2\omega t + \theta_2) + \cdots \\ &+ A_{km} \sin(k\omega t + \theta_k) + \cdots \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km} \sin(k\omega t + \theta_k) \end{aligned}$$

7.1 非正弦周期量及其分解（三）

$$f_{(t)} = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_{km} \sin \theta_k \cos k\omega t + A_{km} \cos \theta_k \sin k\omega t)$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t)$$

$$A_{km} = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad , \quad \tan \theta_k = \frac{a_k}{b_k}$$

$$a_0 = A_0$$

$$a_k = A_{km} \sin \theta_k$$

$$b_k = A_{km} \cos \theta_k$$

7.1 非正弦周期量及其分解（四）

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) d(\omega t)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k\omega t \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos k\omega t \, d(\omega t)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin k\omega t \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin k\omega t \, d(\omega t)$$

例7.1（一）

求图7.2所示矩形波的傅里叶级数。

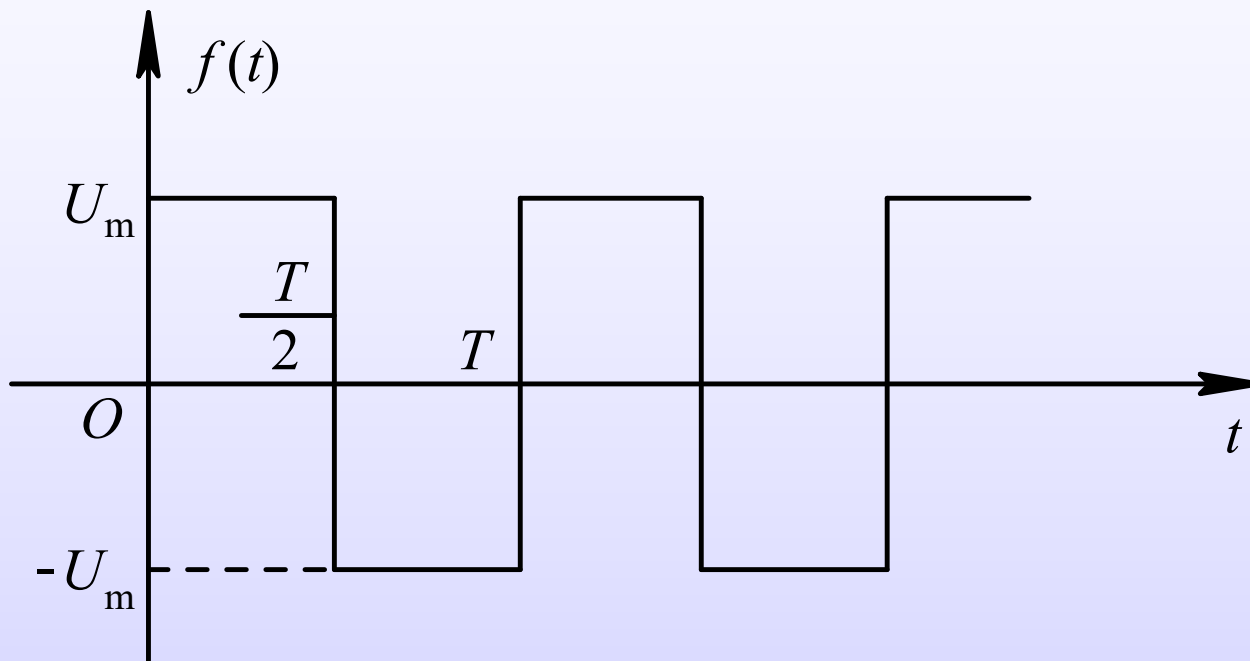


图 7.2 例 7.1 图

例7.1（二）

解 图示周期函数在一个周期内的表达式为

$$f(t) = U_m \quad (0 \leq t \leq \frac{T}{2})$$

$$f(t) = -U_m \quad (\frac{T}{2} \leq t \leq T)$$

根据前述有关知识得

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi U_m d(\omega t) + \frac{1}{2\pi} \int_\pi^{2\pi} (-U_m) d(\omega t) = 0$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi U_m \cos k\omega t d(\omega t) + \frac{1}{\pi} \int_\pi^{2\pi} (-U_m) \cos k\omega t d(\omega t) = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi U_m \sin k\omega t d(\omega t) + \frac{1}{\pi} \int_\pi^{2\pi} (-U_m) \sin k\omega t d(\omega t) = \frac{2U_m}{k\pi} (1 - \cos k\omega t)$$

例7.1（三）

当k为奇数时, $\cos k\pi = -1, b_k = \frac{4U_m}{k\pi}$

当k为偶数时, $\cos k\pi = 1, b_k = 0$.

由此可知该函数的傅里叶级数表达式为

$$f(t) = \frac{4U_m}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \cdots \right)$$

表 7.1 几种周期函数（一）

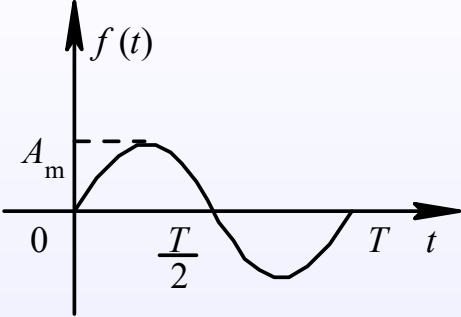
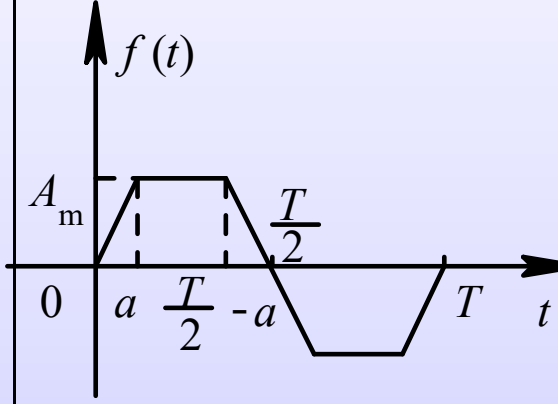
名称	波形	傅里叶级数	有效值	平均值
正弦波		$f(t) = A_m \sin \omega t$	$\frac{A_m}{\sqrt{2}}$	$\frac{2A_m}{\pi}$
梯形波		$f(t) = \frac{4A_m}{a\pi} (\sin a \sin \omega t + \frac{1}{9} \sin 3a \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5a \sin 5\omega t + \dots + \frac{1}{k^2} \sin ka \sin k\omega t + \dots)$ (k为奇数)	$A_m \sqrt{1 - \frac{4a}{3\pi}}$	$A_m (1 - \frac{a}{\pi})$

表 7.1 几种周期函数（二）

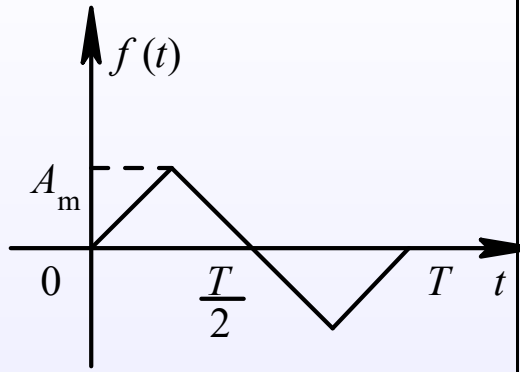
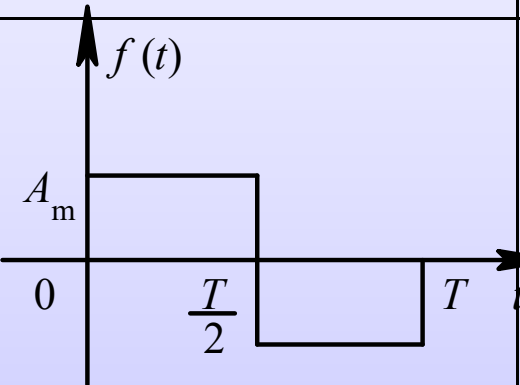
名称	波形	傅里叶级数	有效值	平均值
三角波		$f(t) = \frac{8A_m}{\pi^2} \left(\sin \omega t - \frac{1}{9} \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\omega t + \dots + \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k^2} \sin k\omega t + \dots \right)$ (k为奇数)	$\frac{A_m}{\sqrt{3}}$	$\frac{A_m}{2}$
矩形波		$f(t) = \frac{4A_m}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots + \frac{1}{k} \sin k\omega t + \dots \right)$ (k为奇数)	A_m	A_m

表 7.1 几种周期函数（三）

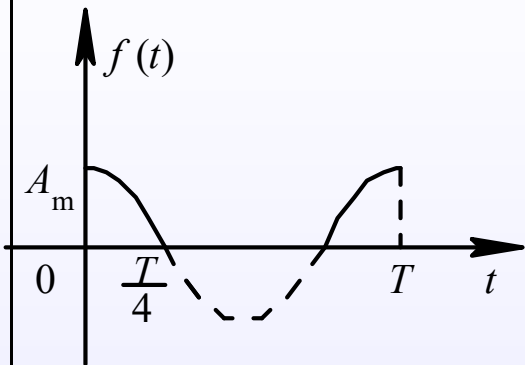
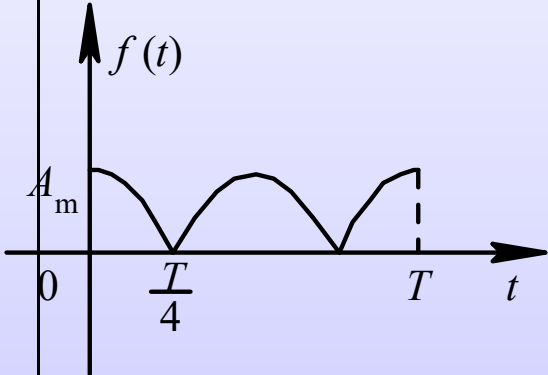
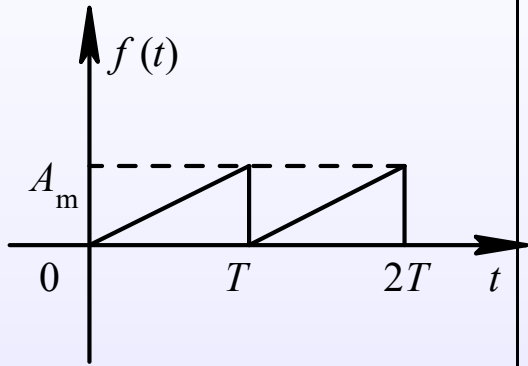
名称	波形	傅里叶级数	有效值	平均值
半波整流波		$f(t) = \frac{2A_m}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \cos \omega t \right. \\ + \frac{1}{1 \times 3} \cos 2\omega t - \frac{1}{3 \times 5} \cos 4\omega t \\ + \frac{1}{5 \times 7} \cos 6\omega t - \dots + \dots \\ \left. \cos \frac{k\pi}{2} - \frac{2}{k^2 - 1} \cos k\omega t + \dots \right) \\ (k = 2, 4, 6 \dots)$	$\frac{A_m}{2}$	$\frac{A_m}{\pi}$
全波整流波		$f(t) = \frac{2A_m}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1 \times 3} \cos 2\omega t \right. \\ - \frac{1}{3 \times 5} \cos 4\omega t + \dots \\ \left. \cos \frac{k\pi}{2} - \frac{2}{k^2 - 1} \cos k\omega t + \dots \right) \\ (k = 2, 4, 6 \dots)$	$\frac{A_m}{\sqrt{2}}$	$\frac{2A_m}{\pi}$

表 7.1 几种周期函数（四）

名称	波形	傅里叶级数	有效值	平均值
锯齿波		$f(t) = \frac{A_m}{2} - \frac{A_m}{\pi}$ $(\sin \omega t + \frac{1}{2} \sin 2\omega t$ $+ \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \dots$ $+ \frac{1}{k} \sin k\omega t + \dots)$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{A_m}{\sqrt{3}}$	$\frac{A_m}{2}$

7.1 非正弦周期量及其分解（五）

3.某些非正弦周期函数

（1）周期函数为奇函数

$$f(t) = -f(-t)$$

$$a_0 = 0, a_k = 0$$

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega t$$

不包括直流分量和余弦项

7.1 非正弦周期量及其分解（六）

（2）周期函数为偶函数

偶函数的傅里叶级数中 $b_k=0$, 所以偶函数的傅里叶级数中不含正弦项。

$$f(t) = -f(-t)$$

（3）奇谐波函数

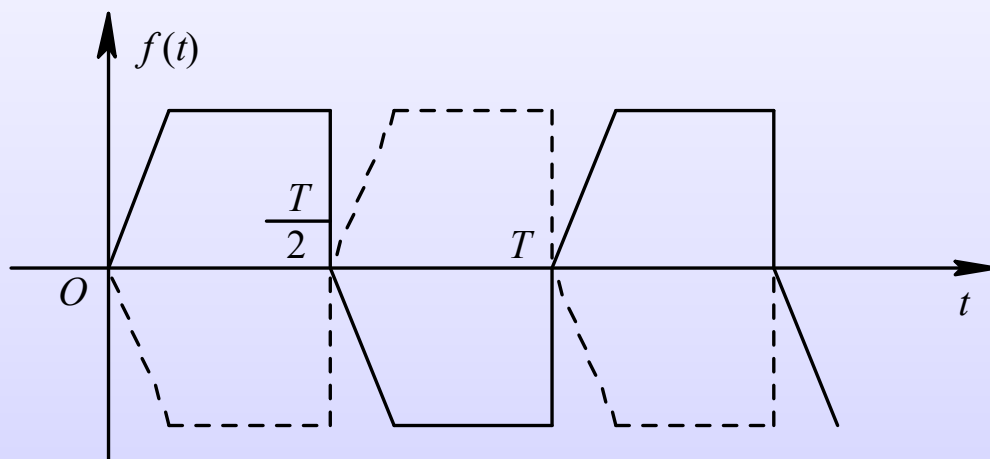


图 7.3 奇谐波函数

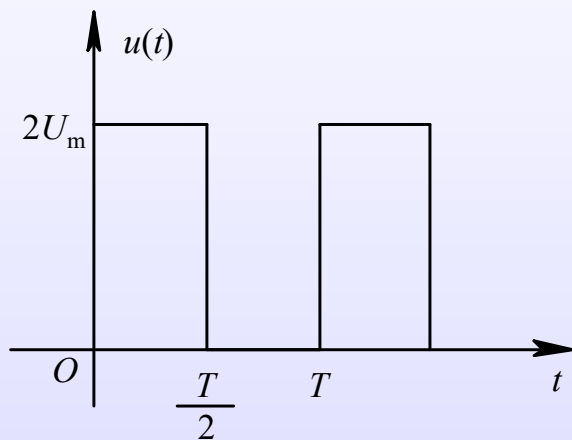
7.1 非正弦周期量及其分解（七）

奇谐波函数只包括奇次谐波，不包括直流分量和偶次。

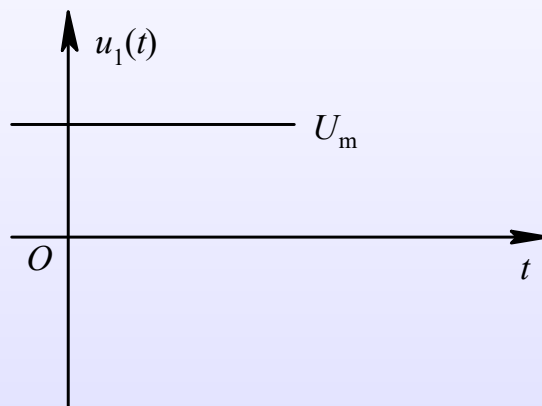
$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t) \quad (k \text{ 为奇数})$$

$$u(t) = U_m + \frac{4U_m}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right)$$

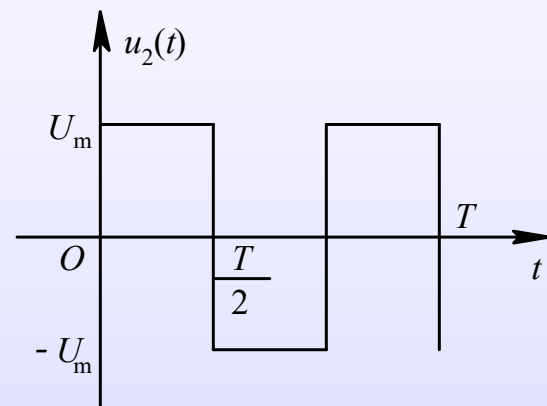
7.1 非正弦周期量及其分解 (八)



(a)



(b)



(c)

图 7.4 波形的分解

例7.2

试把表7.1中振幅为50V、周期为0.02s的三角波电压分解为傅里叶级数（取至五次谐波）。

解 电压基波的角频率为

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.02} = 100\pi \text{ rad/s}$$

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{8U_m}{\pi^2} \left(\sin \omega t - \frac{1}{9} \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\omega t \right) \\ &= \frac{8 \times 50}{\pi^2} \left(\sin 100\pi t - \frac{1}{9} \sin 300\pi t + \frac{1}{25} \sin 500\pi t \right) \\ &= (40.5 \sin 100\pi t - 4.50 \sin 300\pi t + 1.62 \sin 500\pi t) V \end{aligned}$$

7.2 非正弦周期电流电路中的有效值、平均值和平均功率

7.2.1 有效值（一）

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}$$

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \sin(k\omega t + \theta_k)$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \sin(k\omega t + \theta_k)]^2 dt}$$

7.2.1 有效值（二）

$$\frac{1}{T} \int_0^T [I_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km}^2 \sin^2(k\omega t + \theta_k)] dt = I_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k^2$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T 2I_0 I_{km} \sin(k\omega t + \theta_k) dt$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T 2I_{km}(k\omega t + \theta_k) I_{qm} \sin(q\omega t + \theta_q) dt \quad (k \neq q)$$

$$I = \sqrt{I_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k^2} = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + \dots + I_k^2 + \dots}$$

$$U = \sqrt{U_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k^2} = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + \dots + U_k^2 + \dots}$$

7.2.2 平均值（一）

1. 周期量的平均值：周期量绝对值的平均值

$$I_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T |i(t)| dt$$

当 $i(t) = I_m \sin \omega t$ 时, 其平均值为

$$\begin{aligned} I_{av} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |I_m \sin \omega t| d\omega t \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} I_m \sin \omega t d\omega t = \frac{2I_m}{\pi} \\ &= 0.637 I_m = 0.898 I \end{aligned}$$

$$U_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T |u(t)| dt$$

7.2.2 平均值（二）

2. 对周期量, 有时还用波形因数 K_f 、波顶因数 K_A 和畸变因数 K_j 来反映其性质:

$$\left. \begin{aligned} K_f &= \frac{I}{I_{av}} \\ K_A &= \frac{I_m}{I} \end{aligned} \right\} \quad K_j = \frac{I_1}{I}$$

对上例的正弦量

$$K_f = \frac{I}{I_{av}} = 1.11$$

$$K_A = \frac{I_m}{I} = \sqrt{2} = 1.414$$

$$K_j = \frac{I_1}{I} = 1$$

7.2.3 平均功率（一）

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$$

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{km} \sin(k\omega t + \theta_{uk})$$

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \sin(k\omega t + \theta_{ik})$$

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) i(t) dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T [U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{km} \sin(k\omega t + \theta_{uk})] \cdot [I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \sin(k\omega t + \theta_{ik})] dt$$

7.2.3 平均功率（二）

$$P_0 = \frac{1}{T} \int_0^T U_0 I_0 dt = U_0 I_0$$

$$P_k = \frac{1}{T} \int_0^T U_{km} \sin(k\omega t + \theta_{uk}) I_{km} \sin(k\omega t + \theta_{ik}) dt$$

$$= \frac{1}{2} U_{km} I_{km} \cos(\theta_{uk} - \theta_{ik})$$

$$= U_k I_k \cos \varphi_k$$

$$P = P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k$$

7.2.3 平均功率（三）

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \sin \varphi_k$$

$$S = UI = \sqrt{U_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k^2} \cdot \sqrt{I_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k^2}$$

等效正弦波替代原来的非正弦波。等效的条件是：等效正弦量的有效值为非正弦量的有效值，等效正弦量的频率为基波的频率，平均功率不变。

$$\cos \varphi = \frac{P}{UI} = \frac{P}{S}$$

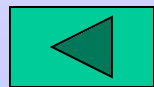
例7.4 (一)

已知某电路的电压、 电流分别为

$$u(t) = [10 + 20\sin(100\pi t - 30^\circ) + 8\sin(300\pi t - 30^\circ)]V$$

$$i(t) = [3 + 6\sin(100\pi t + 30^\circ) + 2\sin 500\pi t]V$$

求该电路的平均功率、 无功功率和视在功率。



例7.4（二）

解 平均功率为

$$P = [10 \times 3 + \frac{20}{\sqrt{2}} \times \frac{6}{\sqrt{2}} \times \cos(-60^\circ)] = 60W$$

无功功率为

$$Q = [\frac{20}{\sqrt{2}} \times \frac{6}{\sqrt{2}} \times \sin(-60^\circ)] = -52 \text{ var}$$

视在功率为

$$S = UI = \sqrt{10^2 + (\frac{20}{\sqrt{2}})^2 + \left(\frac{8}{\sqrt{2}}\right)^2} \times \sqrt{3^2 + (\frac{6}{\sqrt{2}})^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2} = 98.1VA$$

7.3 非正弦周期电流电路的计算

1、其分析电路的一般步骤如下:

(1) 将给定的非正弦激励信号分解为傅里叶级数, 并根据计算精度要求, 取有限项高次谐波。

(2) 分别计算各次谐波单独作用下电路的响应, 计算方法与直流电路及正弦交流电路的计算方法完全相同。对直流分量, 电感元件等于短路, 电容元件等于开路。对各次谐波, 电路成为正弦交流电路。

(3) 应用叠加原理, 将各次谐波作用下的响应解析式进行叠加。

例7.5 (一)

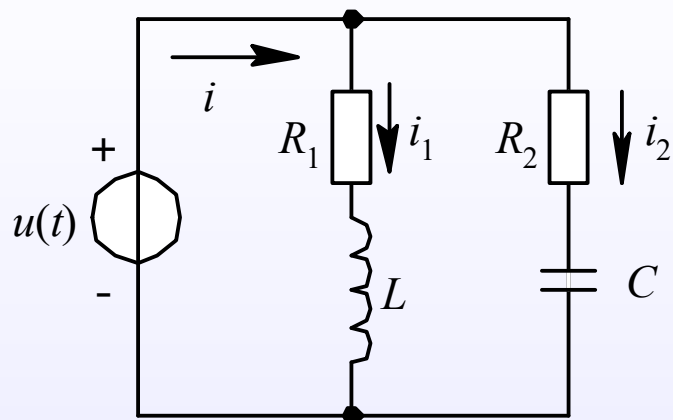
图7.5(a)所示电路中,

$$u(t) = 10 + 100\sqrt{2} \sin \omega t + 50\sqrt{2} \sin(3\omega t + 30^\circ)V,$$

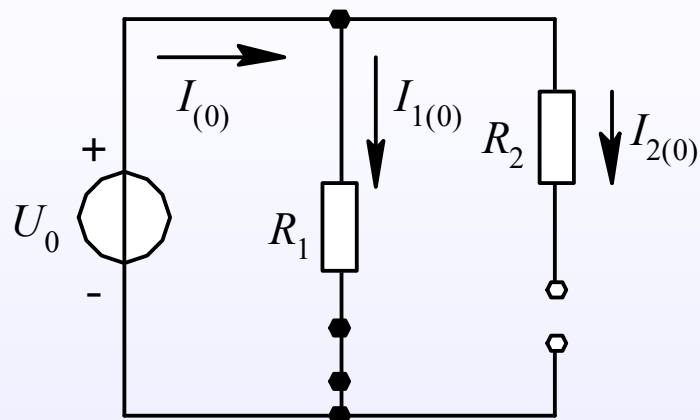
并且已知 $\omega L = 2\Omega, 1/\omega C = 15\Omega, R_1 = 5\Omega, R_2 = 10\Omega,$

求各支路电流及 R_1 支路吸收的平均功率。

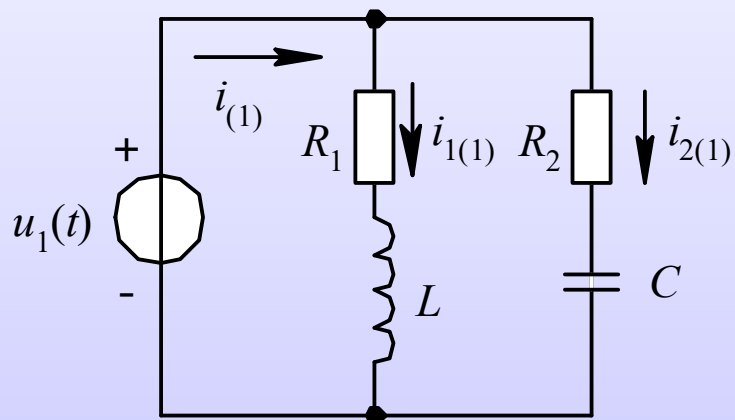
例7.5 (二)



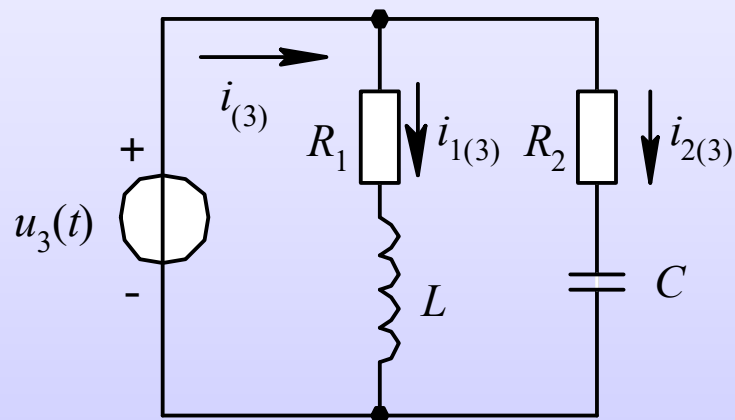
(a)



(b)



(c)



(d)

图 7.5 例 7.5 图

例7.5 (三)

解： (1) 在直流分量 $U_0=10V$ 单独作用下的等效电路如图7.5(b)所示, 这时电感相当于短路, 而电容相当于开路。各支路电流分别为

$$I_{1(0)} = \frac{U_0}{R_1} = \frac{10}{5} = 2A$$

$$I_{2(0)} = 0$$

$$I_{(0)} = I_{1(0)} = 2A$$

例7.5（四）

(2) 在基波分量 $u_1(t) = 100\sqrt{2} \sin \omega t V$ 单独作用下, 等效电路如图7.5(c)所示, 用相量法计算如下:

$$\dot{U}_1 = 100\angle 0^\circ V$$

$$\dot{I}_{1(1)} = \frac{\dot{U}_1}{R_1 + j\omega L} = \frac{100\angle 0^\circ}{5 + j2} = 18.6\angle -21.8^\circ A$$

$$\dot{I}_{2(1)} = \frac{\dot{U}_1}{R_1 + j\omega L} = \frac{100\angle 0^\circ}{10 - j15} = 5.55\angle 56.3^\circ A$$

$$\dot{I}_{1(1)} = \dot{I}_{1(1)} + \dot{I}_{2(1)} = (18.6\angle -21.8^\circ + 5.55\angle 56.3^\circ) = 20.5\angle -6.38^\circ A$$

例7.5（五）

(3) 在三次谐波分量 $u_3 = 50\sqrt{2} \sin(3\omega t + 30^\circ)V$ 单独作用下, 等效电路如图7.5(d)所示。此时, 感抗 $X_{L(3)} = 3\omega L = 6\Omega$, 容抗 $X_{C(3)} = \frac{1}{3\omega C} = 5\Omega$ 。

$$\dot{U}_1 = 50 \angle 30^\circ V$$

$$\dot{I}_{1(3)} = \frac{\dot{U}_3}{R_1 + jX_{L(3)}} = \frac{50 \angle 30^\circ}{5 + j6} = 6.4 \angle -20.19^\circ A$$

$$\dot{I}_{2(3)} = \frac{\dot{U}_3}{R_2 + jX_{C(3)}} = \frac{50 \angle 30^\circ}{10 - j5} = 4.47 \angle 56.57^\circ A$$

$$\dot{I}_{(3)} = \dot{I}_{1(3)} + \dot{I}_{2(3)} = 8.62 \angle 10.17^\circ A$$

例7.5 （六）

$$\begin{aligned} i(t) &= I_{(0)} + i_{(1)} + i_{(3)} \\ &= [2 + 20.5\sqrt{2} \sin(\omega t - 6.38^\circ) + 8.62\sqrt{2} \sin(3\omega t + 10.17^\circ)]A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_1(t) &= I_{1(0)} + i_{1(1)} + i_{1(3)} \\ &= [2 + 18.6\sqrt{2} \sin(\omega t - 21.8^\circ) + 6.4\sqrt{2} \sin(3\omega t - 20.19^\circ)]A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_2(t) &= I_{2(0)} + i_{2(1)} + i_{2(3)} \\ &= [5.55\sqrt{2} \sin(\omega t + 56.3^\circ) + 4.47\sqrt{2} \sin(3\omega t + 56.57^\circ)]A \end{aligned}$$

例7.5（七）

$$I = \sqrt{2^2 + 20.5^2 + 8.62^2} = 22.26 A$$

$$I_1 = \sqrt{2^2 + 18.6^2 + 6.4^2} = 19.72 A$$

$$I_3 = \sqrt{5.55^2 + 4.47^2} = 7.12 A$$

$$\begin{aligned} P_1 &= I_{1(0)} U_0 + I_{1(1)} U_1 \cos \varphi_1 + I_{1(3)} U_3 \cos \varphi_3 \\ &= 2 \times 10 + 18.6 \times 100 \cos(-21.8^\circ) + 6.4 \times 50 \cos 50.19^\circ \\ &= 20 + 1727 + 204.8 = 1951.8 W \end{aligned}$$

例 7.6 (一)

图7.6所示电路中,

$$u_s = (10 + 50\sqrt{2} \sin \omega t + 30\sqrt{2} \sin 3\omega t) V,$$

已知 $R=10\Omega$, $\omega L=30\Omega$, $\omega L_1=10\Omega$, $1/\omega C=90\Omega$ 。

试求 $i(t)$ 、 $i_1(t)$ 、 $u(t)$ 。

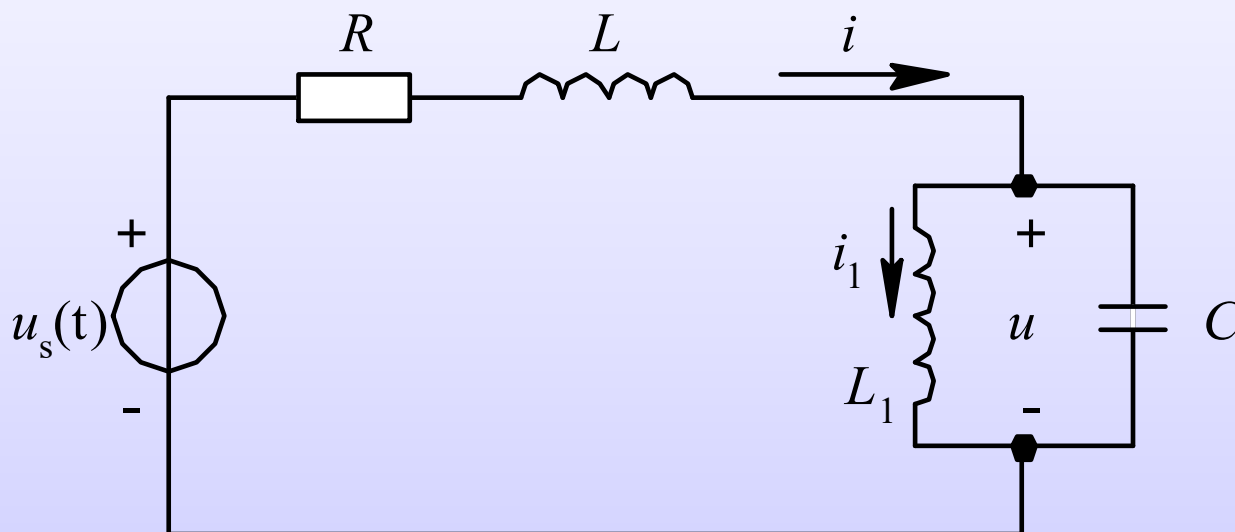


图 7.6 例 7.6 图

例 7.6 (二)

解 (1) 对直流分量 $U_0 = 0$

$$I_0 = I_{1(0)} = \frac{U_{so}}{R} = \frac{10}{10} = 1A$$

(2) 在基波作用下 $\dot{U}_{s1} = 50\angle 0^\circ V$

$$Z_1 = R + j\omega L + \frac{j\omega L_1(-j\frac{1}{\omega C})}{j\omega L_1 - j\frac{1}{\omega C}}$$

$$= 10 + j30 + \frac{10 \times 90}{j10 - j90}$$

$$= 10 + j30 + j11.25 = 42.44\angle 76.37^\circ \Omega$$

例 7.6 (三)

$$\dot{I}_{(1)} = \frac{\dot{U}_{s1}}{Z_1} = \frac{50\angle 0^\circ}{42.44\angle 76.37^\circ} = 1.178 \angle -76.37^\circ A$$

$$\dot{U}_{(1)} = j11.25 \times 1.178 \angle -76.37^\circ = 13.25 \angle 13.63^\circ V$$

$$\dot{I}_{1(1)} = \frac{\dot{U}_{(1)}}{j\omega L_1} = \frac{13.25 \angle 13.63^\circ}{j10} = 1.325 \angle -76.37^\circ A$$

(3) 对三次谐波, 并联的 L_1 、 C 发生谐振, 即 $3\omega L_1 = 1/3\omega C = 30\Omega$, 这部分阻抗为无穷大, 所以

例 7.6 (四)

$$\dot{I}_{(3)} = 0$$

$$\dot{U}_{(3)} = \dot{U}_{s3} = 30V]$$

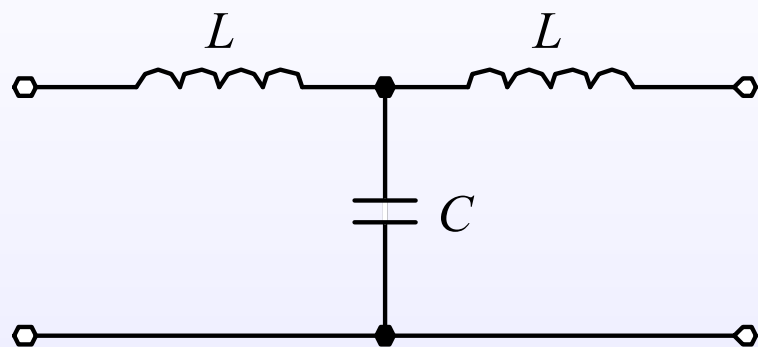
$$\dot{I}_{1(3)} = \frac{\dot{U}_{s3}}{3j\omega L} = \frac{30 \angle 0^\circ}{3 \times j10} = -j1A$$

$$i(t) = I_0 + i_{(1)} + i_{(3)} = [1 + 1.178\sqrt{2} \sin(\omega t - 76.37^\circ)]A$$

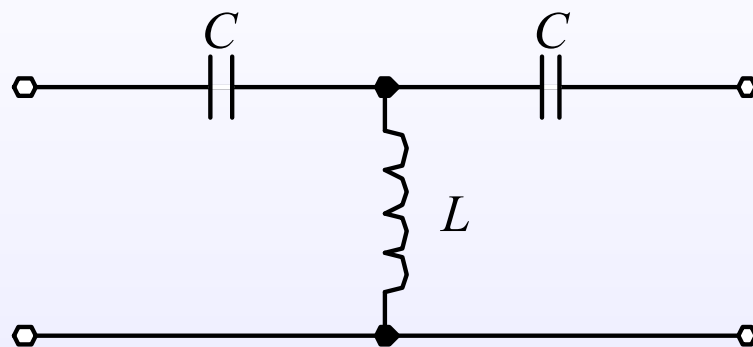
$$i_1(t) = I_{1(0)} + i_{1(1)} + i_{1(3)} = [1 + 1.325\sqrt{2} \sin(\omega t - 76.37^\circ) + \sqrt{2} \sin(3\omega t - 90^\circ)]A$$

$$u(t) = U_0 + u_{(1)} + u_{(3)} = [13.25\sqrt{2} \sin(\omega t + 13.63^\circ) + 30\sqrt{2} \sin 3\omega t]V$$

例 7.6 (五)



(a)



(b)

图 7.7 简单滤波器

教学方法

1.将非正弦周期量的有效值与正弦量的有效值进行比较，便于学生理解、记忆非正弦周期量的有效值。

2.在讲解7.4非正弦周期电路的分析与计算时，利用设疑法引入对非正弦周期电路的解题步骤。

思考题

1. 试求周期电流 $i(t) = 0.2 + 0.8\sin(\omega t - 15^\circ) + 0.3\sin(2\omega t + 40^\circ)$ A 的有效值。
2. 在 R、L、C 串联电路中，已知 $R = 100\Omega$ ， $L = 2.26\text{mH}$ ， $C = 10\mu\text{F}$ ，基波角频率为 $\omega = 100\pi\text{rad/s}$ ，试求对应于基波、三次谐波、五次谐波时的谐波阻抗。